

Metodické materiály na vyučovanie pravdepodobnosti na stredných školách

Instructional Materials for Teaching Probability in Secondary Schools

Michaela Vargová^a – Peter Vankúš^a

^{a*} *Department of Didactics in Mathematics, Physics and Informatics, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University Bratislava, Mlynská dolina F1, 842 48, Bratislava, Slovakia*

Received November 22, 2025; received in revised form December 1, 2025; accepted January 6, 2026

Abstract

In this paper, we introduce innovative approaches to teaching probability that were developed within two projects: KEGA 037UK-4/2024 *Innovative Learning Technologies in the Preparation of Future Mathematics Teachers* and the national project Digital Transformation of Education and Schools (DiTEdu, ITMS2014+: 401402DVR6). These approaches are designed to promote a deep conceptual understanding of probabilistic ideas through their gradual constructivist development, with a strong focus on visualization, hands-on activities, and experimentation. The material addresses topics such as conditional probability, geometric probability, and expected value.

Keywords: probability, teaching materials, constructivism, misconceptions in probability

Classification: 97C30

Úvod

V rámci vyučovania pravdepodobnosti sa často stretávame s výskytom miskoncepcií už aj v rámci základných pojmov na nižšej úrovni abstrakcie (Batanero & Sánchez, 2005). Ako uvádzajú Borovcník a Peard (1996), pravdepodobnostné uvažovanie sa vyznačuje tým, že kontraintuitívne výsledky sa v pravdepodobnosti objavujú už na veľmi elementárnej úrovni.

V iných oblastiach matematiky sa takéto výsledky, odporujúce intuitívnym predstavám, objavujú až pri práci s vysokou mierou abstrakcie. Táto charakteristická črta pravdepodobnosti vysvetľuje existenciu mylných predstáv a ťažkostí s porozumením, ktoré pretrvávajú aj na stredoškolskom stupni (Shaughnessy, 1992; Fischbein, Nello & Marino, 1991).

Napríklad, aj taký velikán ako Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) sa v dôvodení z oblasti pravdepodobnosti pomýlil (Gorroochurn, 2014). Niekoľko rokov po Leibnizovej smrti sa d'Alembert, jeden z najvýznamnejších matematikov svojej doby, zaoberal nasledujúcim problémom:

„Aká je pravdepodobnosť, že pri dvoch hodoch spravodlivou mincou padne aspoň raz hlava?“

*Corresponding author: peter.vankus@fmph.uniba.sk
DOI: 10.17846/AMN.2026.10.1.1-12

V prípade tohto problému d'Alembert poprel, že správnou odpoveďou by mohlo byť $3/4$. Uvažoval takto: ak sa raz objaví hlava, nie je potrebné hádzať mincu druhýkrát; možné výsledky sú teda H, TH, TT a požadovaná pravdepodobnosť je $2/3$. Samozrejme, d'Alembertovo uvažovanie je nesprávne, pretože si neuvedomil, že výsledky H, TH, TT nie sú rovnako pravdepodobné. Chybná odpoveď bola dokonca zahrnutá v jeho článku Croix ou Pile15 Encyclopedie (d'Alembert 1754, zväzok IV, s. 512–513).

Na odhalenie, resp. odstránenie miskoncepcií v oblasti pravdepodobnosti sa ako užitočné nástroje ukazujú experimentovanie, manipulačné aktivity a vizualizácia (Paliwal, 2018). Pre správne pochopenie pravdepodobnostných konceptov je zároveň vhodné rozvíjať ich postupne, v súlade s konštruktivistickým prístupom k vyučovaniu. Samozrejme, po ukončení konštruktivistického budovania pojmu je podľa nás dôležitou súčasťou vyučovacieho procesu následná formalizácia a zavedenie správnej matematickej symboliky a terminológie.

Uvedomujúc si uvedené ťažkosti žiakov aj potenciálne možnosti ich zmiernenia, rozhodli sme sa vytvoriť sériu metodických materiálov zameraných na vybrané témy pravdepodobnosti v stredoškolskom učive.

Túto snahu realizujeme v rámci riešenia projektov KEGA 037UK-4/2024 *Inovačné technológie učenia v príprave budúcich učiteľov matematiky* a DiTEdu 401402DVR6 *Digitálna transformácia vzdelávania a školy*.

Prvý z týchto projektov (KEGA) je zameraný na integráciu inovatívnych vzdelávacích technológií vrátane umelej inteligencie (AI), gamifikácie a online vzdelávacích unikových miestností do prípravy budúcich učiteľov matematiky.

Cieľom projektu je zistiť, ako môžu tieto špičkové technológie zlepšiť vzdelávacie skúsenosti a výsledky budúcich učiteľov matematiky v rámci ich vysokoškolského štúdia, s konečným cieľom zlepšiť ich pripravenosť efektívne vyučovať matematiku v prostredí základných a stredných škôl.

Projekt DiTEdu je zameraný na podporu digitálnej transformácie vzdelávania na Slovensku so zreteľom na systematické budovanie digitálnych kompetencií učiteľov a škôl. Jeho cieľom je rozvíjať a metodicky podporovať školských digitálnych koordinátorov, vytvárať kvalitné metodické materiály a budovať sieť spolupráce medzi školami, odborníkmi a akademickou obcou.

V doterajšej fáze sme pripravili materiály určené na vyučovanie tém geometrická pravdepodobnosť, podmienená pravdepodobnosť a stredná hodnota. V nasledujúcom texte predstavíme vybrané úlohy z týchto materiálov spolu s metodickými poznámkami k ich využitiu vo vyučovaní.

Zároveň priblížime aj spätnú väzbu, ktorú sme získali od učiteľov počas pracovných dielní realizovaných na odborných konferenciách *Dva dni s didaktikou matematiky 2024* a *Dva dni s didaktikou matematiky 2025*, a tiež v rámci používania uvedených materiálov počas Inovačného vzdelávania *Učíme sa učiť matematiku, ktorá inšpiruje*.

Geometrická pravdepodobnosť

Úvodná úloha v metodických materiáloch z geometrickej pravdepodobnosti (Obrázok 1) slúži na ilustráciu základných konceptov tejto problematiky.

Na ručičkových hodinkách sa vybila baterka a hodinky zastali. Určte pravdepodobnosť, že veľká ručička sa zastavila medzi číslami 1 a 5.



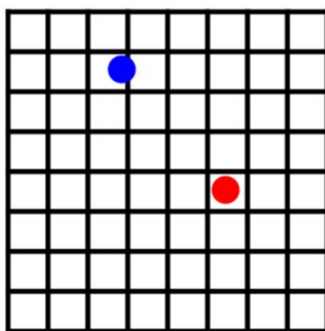
Obr. 1: Úvodná úloha z geometrickej pravdepodobnosti

Pri tejto úlohe je žiadúce, aby si žiaci uvedomili, že množina pozícií konca ručičky je spojitá a nekonečná, nenadobúda len diskkrétne hodnoty. (V rámci diskusie k zadaniu zdôrazníme žiakom zjednodušenie oproti realite, že ručička sa pohybuje spojitاً a rovnomerne.)

Ide o odlišnú situáciu než v predchádzajúcich úlohách z pravdepodobnosti, ktoré vychádzali z početností diskkrétnych konečných množín. Žiaci by si mali tento rozdiel uvedomiť.

Nasledujúca úloha (Obrázok 2) je inšpirovaná hrou Franc-carreau (Fair-square), ktorú opísal napr. Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707-1788) vo svojom článku z roku 1733 (Hykšová, et al., 2012).

Nad hracou doskou so štvorcovou sieťou vyhodíme do vzduchu mincu. Vyhráme, ak minca leží celá vo vnútri niektorého štvorca. Ak minca pretína niektorú stranu štvorca, prehráme. Aká je pravdepodobnosť, že minca bude ležať celá vo vnútri štvorca (teda nepadne na žiadnu stranu štvorca)?

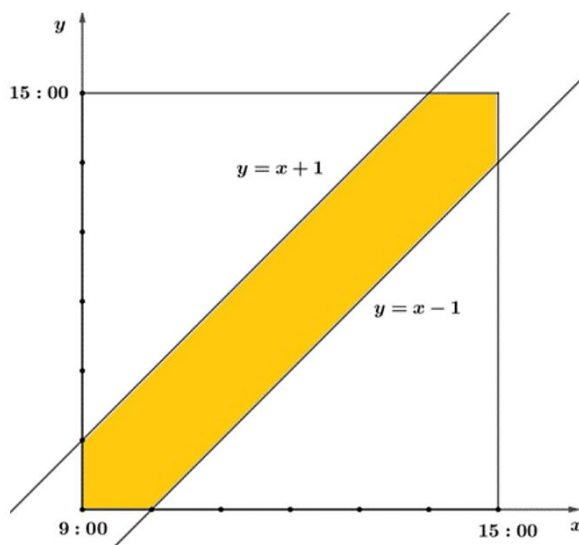


Obr. 2: Geometrická pravdepodobnosť – hra Franc-carreau

Pri tejto úlohe využívame experimentovanie a manipuláciu s fyzickými artefaktmi. Žiakov rozdelíme do menších skupín. V týchto skupinách realizujú 30-krát experiment na doske s rozmerom strany štvorcov **5cm** a s **50** centovou mincou, ktorá má priemer **24,25mm**. Výsledky si skupiny zapisujú. Následne na tabuľu zhrnieme údaje všetkých skupín a na základe toho stanovíme hodnotu experimentálnej pravdepodobnosti výhry. Pokračovaním aktivity je výpočet hodnoty teoretickej pravdepodobnosti.

Táto úloha ilustruje ďalšiu situáciu, kde je potrebné použiť geometrickú pravdepodobnosť. Vzhľadom na priebeh experimentu sú žiaci utvrdení v skutočnosti, že množina pozícií mince nie je diskretná, keďže všetky polohy sú možné. Preto mohutnosť množiny možných pozícií je najlepšie opísateľná ako obsah štvorca polôh stredu mince. V nadväzujúcej diskusii sa zameriame na príčiny odlišnosti hodnôt experimentálnej a teoretickej pravdepodobnosti a vplyv zvyšujúceho sa počtu opakovaní experimentov na odchýlku medzi nimi.

V ďalších úlohách tvoríme propedeutiku k riešeniu známej úlohy o stretávaní sa kamarátov (Obrázok 3; Kubáček, 2010). Návodnými úlohami a otázkami poukazujeme na výhodnosť vizualizácie danej situácie v rovine s využitím znalostí o grafoch elementárnych funkcií.



Obr. 3: Úloha o stretávaní sa kamarátov

Na záver metodického materiálu upozorňujeme na dôležité body, ktoré je potrebné v diskusii žiakom predostrieť za účelom zovšeobecnenia a podmienok použitia konceptu geometrickej pravdepodobnosti.

V diskusii by sme mali dospieť k tomu, že geometrická pravdepodobnosť sa počíta ako pomer mier geometrických útvarov reprezentujúcich množiny vyhovujúcich javov a celého pravdepodobnostného priestoru. Žiaci by si mali v tejto fáze už uvedomovať, že zmienené množiny sú nekonečné a nemajú diskretný charakter a aj to, že je potrebné, aby uvedené miery geometrických útvarov boli konečné

$$p(A) = m(A)/m(\Omega),$$

kde $m(A)$ označuje miery geometrických útvarov reprezentujúcich množiny vyhovujúcich javov a celého pravdepodobnostného priestoru. Musí tiež platiť $A \subseteq \Omega$, pričom $m(\Omega) \neq 0$.

Početnosti v klasickej definícii pravdepodobnosti sú teda pri geometrickej pravdepodobnosti nahradené konečnými mierami daných geometrických útvarov.

Miskoncepce

Pri návrhu tejto sekvencie úloh sme sa zamerali na odstránenie potencionálnych miskoncepí, ktoré sme si pri vyučovaní tejto témy u žiakov všimli. Uvedieme niektoré z nich.

1. Žiaci sa často snažia riešiť tieto úlohy tak, že si vypisujú diskretnú množinu možností, akoby išlo o výpočet pomocou klasickej (Laplaceovej) definície pravdepodobnosti. Neuvedomujú si však, že daná situácia sa zásadne líši od prípadov, v ktorých je možné pracovať s konečnými súbormi rovnako pravdepodobných možností.
2. Aj študenti na našej fakulte uvádzajú ako vhodnú úlohu pri zavádzaní geometrickej pravdepodobnosti situáciu, v ktorej počítame pravdepodobnosť súvisiacu so streľbou do vybraných častí terča. Táto situácia však nie je vhodná, keďže sa nejedná o náhodný dej, nakoľko strieľajúci sa snaží mieriť. Prejavuje sa tu teda skutočnosť, že žiaci si neuvedomujú všetky predpoklady podmienujúce vhodnosť použitia konceptu geometrickej pravdepodobnosti.
3. Zaujímavú miskoncepciu sme si všimli pri zadaní úlohy:

V intervale $(0,1)$ zvolíme rovnomerne náhodne a nezávisle dve čísla x, y . Nájdite pravdepodobnosť, že ich súčet sa rovná $3/2$.

Dochádzalo tu k zámene pojmov nemožný jav a jav s nulovou pravdepodobnosťou.

Podmienená pravdepodobnosť

Danú tému v našom metodickom materiáli motivujeme známou úlohou *O taxíkoch* (Tversky & Kahneman, 1980).

V meste sú dve taxislužby. Jedna má 85 zelených áut, druhá 15 modrých áut. Počas hmlistého večera jazdili všetky taxíky. Jeden zrazil mladého muža. Ten neskôr vypovedal, že taxík bol modrý. Polícia overila, nakoľko je muž schopný rozoznať farbu v podobných podmienkach, ako boli v ten večer. Zistila, že farbu dokáže určiť správne v 75% prípadov. Aká je pravdepodobnosť, že muž bol naozaj zrazený modrým taxíkom?

Pokúste sa odhadnúť, či je väčšia pravdepodobnosť, že muža zrazil modrý taxík, resp. či je väčšia pravdepodobnosť, že muža zrazil zelený taxík.

Cieľom tejto úlohy je motivovať žiakov; samotné riešenie prebehne až na záver sekvencie úloh, ktorá je zameraná na postupné budovanie potrebného aparátu. Začíname jednoduchou úlohou, pomocou ktorej ilustrujeme zúženie pravdepodobnostného priestoru danou podmienkou:

Hodíme dvoma kockami (modrou a červenou). Na aspoň jednej z nich padla trojka. Aká je pravdepodobnosť, že súčet padnutých čísel na kockách je 7?

Túto situáciu porovnávame so situáciou bez zadania podmienky:

Hodíme dvoma kockami (modrou a červenou). Aká je pravdepodobnosť, že súčet padnutých čísel na kockách je 7?

Obe situácie vizualizujeme pomocou tabuľky (Obrázok 4).

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

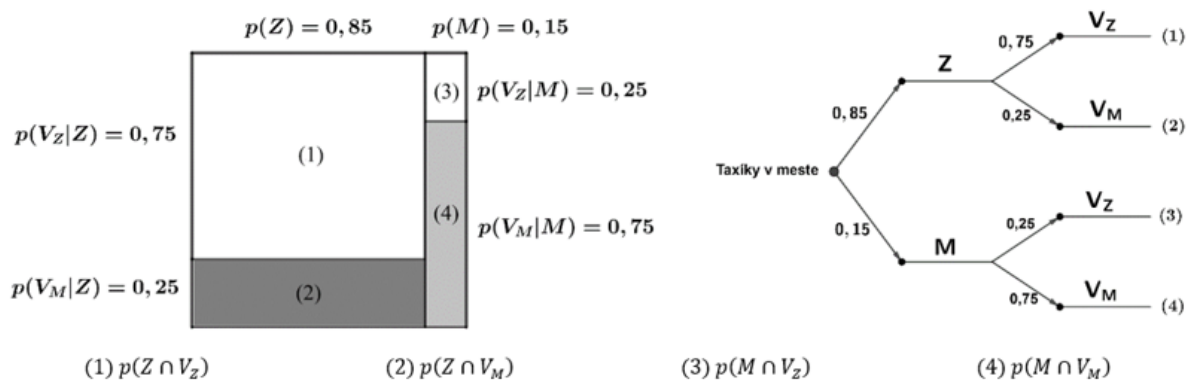
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Obr. 4: Tabuľky súčtu padnutých hodnôt bez podmienky a s podmienkou

Po takomto zavedení podmienenej pravdepodobnosti prechádzame cez riešenia niekoľkých úloh až k riešeniu motivačnej úlohy *O taxíkoch*.

Riešenie úlohy ilustrujeme pomocou rôznych spôsobov vizualizácie, konkrétne pomocou početnosti výskytov, jednotkového štvorca a pomocou stromového grafu (Vankúš & Vargová, 2024). Tieto prístupy sú zobrazené na Obrázku 5.

	V_Z	V_M	Σ
Z	$ Z \cap V_Z =$ $= 0,75 \cdot 8\,500 = 6\,375$	$ Z \cap V_M =$ $= 0,25 \cdot 8\,500 = 2\,125$	8 500
M	$ M \cap V_Z =$ $= 0,25 \cdot 1\,500 = 375$	$ M \cap V_M =$ $= 0,75 \cdot 1\,500 = 1\,125$	1 500
Σ	6 750	3 250	$ \Omega = 10\,000$



Z – muža zrazil zelený taxík; M – muža zrazil modrý taxík; V_Z – muž videl farbu taxíka, ktorý ho zrazil, ako zelenú; V_M – muž videl farbu taxíka, ktorý ho zrazil, ako modrú.

Obr. 5: Rôzne spôsoby vizualizácie riešenia úlohy

Formálne zapísanie uvedených postupov vedie študentov priamo k formulácii Bayesovho vzorca pre výpočet podmienenej pravdepodobnosti.

Miskoncepce

Pri návrhu, resp. aplikácii danej sekvencie úloh z podmienenej pravdepodobnosti sme sa snažili adresovať miskoncepce, ktoré sme si u žiakov v rámci tohto tematického celku všimli.

1. Žiaci si neuvedomia, že podmienka zužuje daný pravdepodobnostný priestor, čo má vplyv na početnosti vystupujúce vo výpočte hľadanej pravdepodobnosti.
2. Žiaci si zamieňajú javy $p(A|B)$ a $p(B|A)$, pričom im nie je zrejmé, ktorú hodnotu hľadajú a ktorá je známa už z údajov zo zadania.

Stredné hodnoty

V rámci sekvencie úloh venovanej stredným hodnotám sa snažíme viesť žiakov od intuitívneho chápania priemeru až k jeho formálnejšiemu a pravdepodobnostnému poňatiu. Cieľom je, aby žiaci pochopili spojenie medzi priemerom a očakávanou hodnotou ako jednotiacim konceptom.

Úvodné úlohy sú zamerané na výpočty aritmetického priemeru ako reprezentanta typickej hodnoty v súbore čísel (Obrázok 6).

- A) Hádzeme kockou 60-krát. Tento pokus opakujeme dostatočne veľa krát. Aká je predpokladaná priemerná hodnota hodov? Aký súčet daných 60 hodov by ste očakávali?
- B) V tabuľke je uvedených šesť kociek a číslovanie ich stien. Vyberte tú kocku, o ktorej si myslíte, že po 60-tich hodoch bude dávať najvyšší súčet všetkých 60 padnutých čísel. Akú hodnotu daného súčtu by ste očakávali? (Tento experiment s vami vybranou kockou realizujte. Akú hodnotu súčtu ste dostali? Líši sa táto hodnota od očakávanej hodnoty? Ak áno, prečo? Akú hodnotu súčtu by ste očakávali pri zvyšných kockách?) (Križánková, 2023)

	Číslovanie stien
Kocka č. 1	1 – 2 – 2 – 4 – 4 – 6
Kocka č. 2	1 – 1 – 3 – 3 – 5 – 6
Kocka č. 3	1 – 1 – 3 – 4 – 4 – 6
Kocka č. 4	1 – 2 – 2 – 3 – 5 – 6
Kocka č. 5	1 – 1 – 2 – 4 – 5 – 6
Kocka č. 6	1 – 2 – 2 – 2 – 6 – 6



Obr. 6: Motivačná úloha k stredným hodnotám

V ďalšej fáze žiaci objavujú potrebu úpravy vzťahu pre aritmetický priemer, keďže uvažujeme o hodnotách, ktoré nastávajú s rôznou pravdepodobnosťou (Obrázok 7, Obrázok 8).

Majme falošnú kocku. Číslo 6 na nej padá s pravdepodobnosťou $1/2$. Ostatné hodnoty padajú s pravdepodobnosťou $1/10$. Kocku hodíme 60-krát. Tento experiment opakujeme dostatočne veľa krát.

- A) Aký je očakávaný počet padnutia hodnôt 6 v týchto 60 hodov?
- B) Aký je očakávaný počet padnutia hodnôt a) 1, b) 2 a 3.
- C) Aká je očakávaná priemerná hodnota jedného hodu?

Obr. 7: Úloha s falošnou kockou

Majme dve falošné kocky z predošlej úlohy. (6 na nej padá s pravdepodobnosťou $1/2$. Ostatné hodnoty padajú s pravdepodobnosťou $1/10$.) Obe kocky naraz hodíme 600-krát. Tento experiment opakujeme dostatočne veľa krát.

- A) Vyjadrite v tabuľke, aké sú početnosti padnutia jednotlivých dvojíc hodnôt na kockách.
- B) Vyjadrite v tabuľke, aké sú pravdepodobnosti padnutia jednotlivých dvojíc hodnôt na kockách.
- C) Vypočítajte očakávanú strednú (priemernú) hodnotu padnutého súčtu pomocou početností z tabuľky?
- D) Vypočítajte očakávanú strednú (priemernú) hodnotu padnutého súčtu pomocou pravdepodobností z tabuľky?

Obr. 8: Súčet padnutých hodnôt na dvoch falošných kockách

V záverečnej úlohe sekvencie sa pojem strednej hodnoty zovšeobecňuje na prostredie javov, kde ide o výpočet očakávanej hodnoty náhodnej veličiny (Obrázok 9). Motivujúcim prvkom je

aplikácia v prostredí hry, kde žiaci analyzujú pravidlá a určujú výhodnosť alebo férovosť hry na základe jej strednej hodnoty. Takýto prístup podporuje prepojenie matematiky s reálnymi situáciami, rozvíja štatistické myslenie a podporuje hlbšie porozumenie významu strednej hodnoty.

Hráme hru, v ktorej vyťahujeme náhodne jednu farebnú guľičku z vrečka. Vo vrečku sa nachádza 20 guľičiek: 2 červené, 3 žlté, 4 modré, 5 zelených a 6 čiernych guľičiek. Po ťahu guľičku vraciame do vrečka a dostaneme vyplatenú výhru resp. prehráme určitú sumu, podľa priloženej tabuľky.

Červená	Žltá	Modrá	Zelená	Čierna
-10 EUR	5 EUR	2 EUR	7 EUR	-15 EUR

A) Myslíte si, že je táto hra pre vás výhodná?

B) Ak by sme hru opakovali dostatočne veľa krát, aká by bola očakávaná stredná hodnota výhry resp. prehry?

Obr. 9: Úloha o posúdení výhodnosti hry

Miskoncepce

Pri tvorbe danej sekvencie úloh sme sa zamerali na odstránenie miskoncepcií, ktoré sme v tejto téme pozorovali u žiakov. Konkrétne sa jedná o:

1. Nepochopenie princípu zákona veľkých čísel. Žiaci často mylne predpokladajú, že v prvej úlohe (Obrázok 6) nie je možné odhadnúť súčet, pretože nepoznáme konkrétne hodnoty, ktoré padnú. Pri riešení úlohy je preto potrebné u žiakov posilniť predstavu, že pri dostatočne veľkom počte opakovaní daného javu sa stredná hodnota súčtu hodnôt na kockách približuje určitej hodnote. Táto hodnota zodpovedá priemeru hodnôt jednotlivých stien homogénnej kocky.
2. Očakávaná hodnota musí byť možnou hodnotou náhodnej veličiny. Žiaci majú napr. pri výpočte strednej hodnoty čísel na stenách štandardnej kocky problém uchopiť skutočnosť, že daná stredná hodnota nie je žiadnou z hodnôt, ktoré sa na stenách kocky vyskytujú.
3. Zámena očakávanej hodnoty s najpravdepodobnejšou hodnotou. Pri riešení úlohy z obrázku 6, bod B) si niektorí žiaci zvolili ako najvýhodnejšiu kocku tú, ktorá mala na stenách najvyšší počet hodnôt 6, pričom mali problém uchopiť skutočnosť, že dané kocky sú rovnocenné na základe rovnosti ich stredných hodnôt čísel na ich stenách.
4. Očakávaná hodnota ako garantovaný výsledok jedného pokusu, resp. očakávaná hodnota ako presná predikcia budúcich výsledkov (hry). V rámci úlohy z obrázku 9 môžu žiaci nadobudnúť dojem, že pri každej hre s kladnou očakávanou hodnotou výhry musia vyhrať, resp., že nie je možné, aby pri viacnásobnom opakovaní danej hry boli stratoví. Túto miskoncepciu je možné odstrániť na základe experimentálnej realizácie. Aj v tomto prípade si žiaci musia uvedomiť platnosť zákona veľkých čísel, t. j. potrebu dostatočne veľkého počtu opakovania, aby sa experimentálne zistené priemerné hodnoty blížili k očakávaným hodnotám.

Spätná väzba

V tejto časti príspevku prezentujeme spätnú väzbu získanú pri využívaní vybraných metodických materiálov, ktorú sme zberali prostredníctvom dotazníkov.

Metodické materiály zamerané na podmienenú pravdepodobnosť sme prezentovali učiteľom počas pracovnej dielne, realizovanej na konferencii *Dva dni s didaktikou matematiky 2024*.

Materiály zamerané na stredné hodnoty sme učiteľom predstavili počas pracovnej dielne realizovanej na konferencii *Dva dni s didaktikou matematiky 2025*.

Materiály zamerané na všetky tri témy (geometrická pravdepodobnosť, podmienená pravdepodobnosť a stredné hodnoty) sme zaradili do programu Inovačného vzdelávania *Učíme sa učiť matematiku, ktorá inšpiruje*. Materiály z geometrickej pravdepodobnosti však boli využité počas online časti vzdelávania, a preto k tejto téme nemáme zozbieranú spätnú väzbu.

Pri metodických materiáloch zameraných na stredné hodnoty učitelia hodnotili pripravenú sekvenciu úloh. Ich výpovede sme následne analyzovali pomocou tematickej analýzy (Schreier et al., 2019). V tabuľke 1 uvádzame identifikované kódy spolu s ukážkami konkrétnych výpovedí učiteľov.

Tabuľka 1 Kódy reakcií učiteľov na materiály z témy Stredné hodnoty

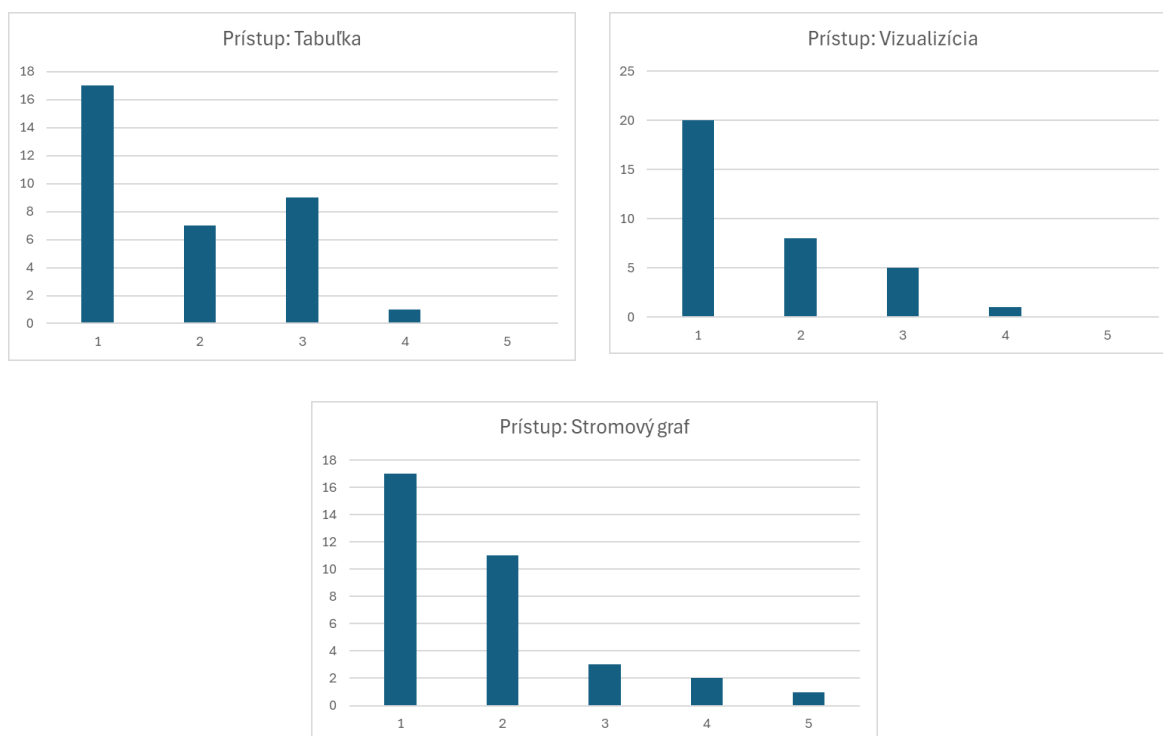
Kód	Príklad výpovede
Pozitívne hodnotenie vhodnosti sekvencie úloh	Úlohy boli zvolené veľmi vhodne, páčila sa mi najmä úloha s guľičkami a priradenie hodnoty k nim. Úlohy sú fajn, vedú k tvorivému premýšľaniu. Vhodná, pekná nadväznosť.
Návrh na pridanie úloh do metodiky	Páčili sa mi, pridala by som ešte nejakú úlohu ako je posledná úloha (obrázok 9).
Pripomienky k formulácii úloh	Niektoré formulácie boli náročnejšie na pochopenie, napr. čo je „pokús“. Lepšie popísať v úvode, čo je jeden pokús (60 hodov kockou).

Z tabuľky 1 vidíme, že učitelia hodnotili sekvenciu úloh na tému stredné hodnoty pozitívne. Ocenili vhodnosť vybraných úloh a ich potenciál pre rozvoj tvorivého myslenia. Niektorí ale požadovali presnejšie formulácie v zadaní úlohy z obrázka 6, pričom pre žiakov tu predstavovalo problém uchopiť skutočnosť, že jeden pokús v rámci experimentu predstavuje 60 hodov kockou.

Pri materiáloch týkajúcich sa podmienenej pravdepodobnosti učitelia odpovedali na dve položky:

1. Ako sa Vám páčili prezentované prístupy k riešeniu úloh, zameraných na využitie podmienenej pravdepodobnosti? (Prístupy: Tabuľka (početnosti výskytov), Vizualizácia (jednotkovým štvorcem), Stromový graf; škála pozitívny 1---2---3---4---5 negatívny).

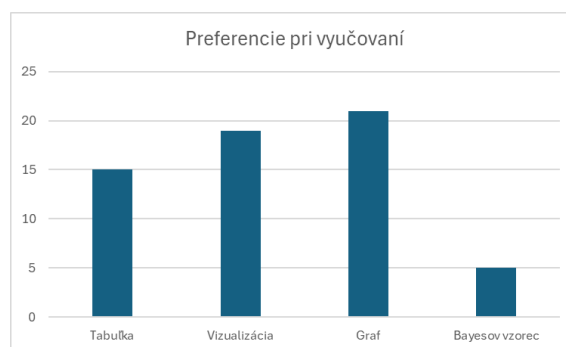
Výsledky pre túto položku zobrazuje obrázok 10.



Obr. 10: Preferencie prístupov k vizualizácii učiteľmi

2. Ktorý z prístupov k riešeniu by ste preferovali pri vyučovaní svojich žiakov? (Možnosti: a) Tabuľka (početnosti výskytov), b) Vizualizácia (jednotkovým štvorcom), c) Stromový graf, d) Bayesov vzorec; učitelia mohli zvoliť viac možností).

Pre položku 2 sú výsledky na obrázku 11.



Obr. 11: Prístupy, ktoré by učitelia použili pri vyučovaní

Ako vidíme z obrázka 10, každý z prezentovaných prístupov vizualizácie riešenia úloh z podmienenej pravdepodobnosti si našiel dostatočný počet učiteľov, ktorým sa páčil. Obrázok 11 nám pritom ukazuje, že v rámci vyučovania danej témy v škole učitelia najviac preferujú znázornenie stromovým grafom, nasleduje vizualizácia jednotkovým štvorcom a na poslednom mieste je tabuľka početností výskytov.

Záver

V tomto príspevku sme poskytli prehľad o doterajšej podobe metodických materiálov určených na vyučovanie vybraných tém pravdepodobnosti na strednej škole. Materiály sme vypracovali na základe presvedčenia, že porozumenie jednotlivým konceptom a pojmom je potrebné budovať postupne a v súlade s princípmi konštruktivismu.

Pri tvorbe materiálov sme zohľadnili možné miskoncepce žiakov. Snažili sme sa sekvenciu úloh koncipovať tak, aby sme výskytu týchto miskoncepcií predchádzali. Prípadne sme chceli u žiakov vyvolať kognitívny nesúlad medzi ich mylnými intuitívnymi predstavami a závermi vyplývajúcimi z riešenia úloh, čo by mohlo viesť k ich odstráneniu.

Jednou z častých príčin miskoncepcií v pravdepodobnostnom myslení je nepochopenie zákona veľkých čísel, preto sme v metodických materiáloch nezabudli na experimentálnu realizáciu skúmaných javov, a to či už prostredníctvom fyzických pomôcok alebo simulácií experimentov pomocou hotových apletov, výpočtovej techniky a umelej inteligencie.

K miernym úpravám metodických materiálov sme pristúpili aj na základe spätnej väzby od učiteľov, ktorým boli tieto materiály predstavené počas workshopov a inovačného vzdelávania, a ktorá je prezentovaná v tomto príspevku.

Očakávame, že ďalšie úpravy metodík — najmä čo sa týka vhodnosti a počtu návodných úloh či otázok, ako aj miery explicitnosti odporúčaní pre vedenie diskusie medzi učiteľom a žiakmi (napríklad pri zovšeobecňovaní alebo formulovaní podmienok použitia daného konceptu či pojmu) — budú realizované po ich otestovaní v reálnom vyučovacom procese v rámci projektu DiTEdu.

Podakovanie

Článok bol podporený z projektu KEGA č. 037UK-4/2024 *Inovačné technológie učenia v príprave budúcich učiteľov matematiky* a z projektu DiTEdu, ITMS2014+: 401402DVR6 *Digitálna transformácia vzdelávania a školy*.

Literatúra

Batanero, C., & Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 241–266). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_11

Borovcnik, M., & Peard, R. (1996). Probability. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education [Part 1]* (pp. 239–288). Kluwer.

d'Alembert, J. L. R. (1754). Croix ou pile. In D. Diderot & J. L. R. d'Alembert (Eds.), *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (Vol. 4, p. 250).

Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523–549.

Gorroochurn, P. (2014). Errors of probability in historical context. In M. Pitici (Ed.), *The best writing on mathematics 2013* (pp. 191–212). Princeton University Press. <https://doi.org/10.1515/9781400847990-020>

Harman, R. (2009). *Náhodná premenná a jej stredná hodnota*. Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského. http://www.iam.fmph.uniba.sk/ospm/Harman/misc/SUS_QED.pdf

Hykšová, M., Kalousová, A., & Saxl, I. (2012). Early history of geometric probability and stereology. *Image Analysis & Stereology*, 31(1), 1–16. <https://doi.org/10.5566/ias.v31.p1-16>

- Križánková, M. (2024). Hrové vyučovanie pravdepodobnosti a štatistiky. In J. Gurican & J. Tekel (Eds.), *Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2024. Zborník príspevkov* (s. 127–132). Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského.
- Kubáček, Z. (2010). Matematika pre 2. ročník gymnázií, 2. časť. Orbis Pictus Istropolitana.
- Paliwal, V. (2018). Do manipulatives foster pre-service teachers' understanding of probability? In University of West Georgia (p. 2). <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1191659.pdf>
- Schreier, M., Stamann, C., Janssen, M., Dahl, T., & Whittal, A. (2019). *Qualitative content analysis: Conceptualizations and challenges in research practice*.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465–494). Macmillan.
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1980). Causal schemas in judgments under uncertainty. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Vankúš, P., & Vargová, M. (2025). Vizualizácie úlohy z podmienenej pravdepodobnosti. *Učiteľ Matematiky*, 32(4), 245–248. <https://ojs.cuni.cz/ucitel/article/view/4780>